

# Control de Tracción en Robots Móviles con Ruedas

R. Fernández<sup>1</sup> R. Aracil<sup>2</sup> M. Armada<sup>3</sup>

## Resumen

En este trabajo se presenta una solución para mejorar el rendimiento de los robots móviles con ruedas que se desplacen sobre superficies con un bajo coeficiente de fricción estática. En estas circunstancias, los robots móviles con ruedas pueden experimentar pérdidas de tracción, y por tanto, sufrir deslizamientos a lo largo de la superficie. La solución descrita propone la utilización de una configuración especial para el robot móvil, en la que todas las ruedas son accionadas de forma independiente, y una estructura de control que consta de tres partes bien diferenciadas: un controlador de seguimiento con realimentación de estado basado en el modelo cinemático del robot, una extensión de la ley de control cinemático resultante para incorporar la dinámica del robot móvil utilizando *backstepping*, y un algoritmo de distribución de la fuerza de tracción global, que calcula las señales de referencia adecuadas para cada una de las ruedas. Con esta estructura se consigue controlar la posición y la velocidad del robot móvil, y al mismo tiempo, distribuir la fuerza de tracción global entre las ruedas, evitando así el deslizamiento del robot. El funcionamiento de los algoritmos de control es evaluado mediante pruebas experimentales.

## Palabras Clave:

robots móviles, distribución de la fuerza de tracción global, control no lineal, deslizamientos, superficies con bajo coeficiente de fricción estática.

## 1. Introducción

El control de la tracción es un aspecto crítico en los robots móviles que se desplazan sobre superficies con un bajo coeficiente de fricción estática, o que deben moverse sobre suelos poco compactos (arena, lodo, nieve), donde un deslizamiento excesivo puede provocar incluso que las ruedas del robot móvil se hundan en el terreno y queden atrapadas en el mismo.

Muchos de los estudios realizados relativos al control de tracción en robots móviles con ruedas han venido motivados por la necesidad de contar con vehículos adecuados para exploraciones planetarias (Balaram, 2000). Así, por ejemplo, el método de control de tracción presentado en (Yoshida, 2003) para un robot de exploración planetaria utiliza una estimación del deslizamiento basada en el modelo físico de interacción entre la rueda y el terreno, mientras que en (Iagnemma and Dubowsky, 2004), se presenta un método para controlar la tracción en terreno irregular que se basa en las propiedades del terreno y en su geometría para obtener el ángulo de contacto entre las

ruedas y el suelo. Utilizando esta información, el método optimiza el par aplicado en cada rueda con la intención de obtener la tracción máxima, dependiendo de la dificultad local del terreno. Desafortunadamente, con las soluciones propuestas por (Yoshida, 2003) e (Iagnemma and Dubowsky, 2004), resulta complicado obtener un modelo general para diferentes tipos de terreno o condiciones cambiantes.

En (Waldron and Abdallah, 2007) se presenta un esquema de control de tracción óptimo para un vehículo de seis ruedas. El algoritmo propuesto intenta asignar las fuerzas de tal manera que se minimice el ángulo de fricción máximo en todos los puntos de contacto. En (Lei et al., 2008) también se presenta un esquema de control de tracción para un robot móvil de seis ruedas, pero en este caso, los autores utilizan un controlador por modo deslizante para estimar tanto las fuerzas de tracción como el momento de giro necesarios para llevar a cabo el movimiento deseado del cuerpo del robot, y a continuación utilizan una matriz pseudo-inversa para calcular las fuerzas de tracción de cada una de las ruedas. En (Liu et al., 2010) se presenta un control de tracción borroso para un vehículo NJ2045. Los autores proponen un modelo del proceso de aceleración en línea recta para el vehículo de cuatro ruedas, y utilizan la apertura del acelerador para regular el par de salida del motor. Sin embargo, en todos

estos trabajos, (Waldron and Abdallah, 2007; Lei et al., 2008; Liu et al., 2010)), los autores se limitan a presentar resultados de simulación.

Por otra parte, también existen muchos trabajos aplicados a vehículos de pasajeros que se desplazan sobre carreteras planas (Anwar, 2003). De hecho, una técnica muy conocida en la industria automotriz es la utilización del sistema de antibloqueo (*ABS - Antilock Bracking System*). Este sistema emplea la información de deslizamiento de cada rueda para corregir su velocidad (Sakai and Hori, 1999). Aunque esta técnica podría utilizarse en el control de tracción de robots móviles con ruedas, tiene la desventaja de no tomar en cuenta el modelo cinemático del vehículo y de reaccionar con cierto retraso, ya que las velocidades sólo son corregidas cuando ya ha ocurrido el deslizamiento, lo que puede provocar errores de posicionamiento del robot, especialmente en aquellos que sólo utilizan codificadores ópticos incrementales instalados en las ruedas para estimar el desplazamiento lineal (Ojeda and Borenstein, 2004).

Cabe citar también algunos trabajos recientes dedicados al estudio de sistemas de control de tracción en vehículos menos convencionales. Así pues, en (Jones and Stol, 2010) se estudia la estabilidad de un vehículo de dos ruedas, similar al Segway PT, en superficies con poca tracción y se proponen dos controladores en los cuales el objetivo de diseño es la estabilidad del ángulo de inclinación del vehículo. En las simulaciones realizadas, ambos controladores son capaces de mantener la estabilidad del robot en superficies sin fricción. Sin embargo, tan sólo uno de los controladores presentados es utilizado experimentalmente para alcanzar el equilibrio del robot en superficies sin fricción, pero dicho controlador es incapaz de lograr el equilibrio en superficies no deslizantes debido a efectos no modelados de las ruedas. En (Chen and Chu, 2010) se propone un controlador en modo deslizante borroso para un monopatín eléctrico. El coeficiente de fricción de la superficie es estimado utilizando un observador para la fuerza normal y la fuerza de tracción. Los resultados preliminares de las simulaciones muestran que el sistema de control de tracción propuesto puede mantener la tasa de deslizamiento en la región estable. En (Chen et al., 2011) se presenta un sistema de control de tracción para un vehículo omnidireccional, en el que los autores utilizan una estimación de Kalman extendida, apoyada en los múltiples grados de libertad del vehículo, para estimar la velocidad longitudinal del vehículo, la velocidad lateral y el ángulo de deslizamiento lateral. El sistema de control de tracción calcula entonces las tasas de deslizamiento de las cuatro ruedas de acuerdo con la velocidad estimada del vehículo y se controla la tracción con un PID. Tanto el algoritmo de estimación como el control de tracción son evaluados por medio de simulaciones. Finalmente, en (Boh et al., 2010) se propone el diseño de un experimento para validar el teorema de Bekker, utilizado para el modelado de la interacción de las ruedas de un vehículo con el suelo, en aplicaciones subacuáticas.

En este trabajo se presenta una solución para mejorar la tracción de los robots móviles con ruedas que se desplacen sobre superficies con un bajo coeficiente de fricción estática. La solución descrita propone la utilización de una configuración especial para el robot móvil, en la que todas las ruedas

son accionadas de forma independiente, y una estructura de control que consta de tres partes bien diferenciadas: un controlador de seguimiento con realimentación del estado basado en el modelo cinemático del robot, una extensión de la ley de control cinemático resultante para incorporar la dinámica del robot móvil utilizando *backstepping* (Tsinias, 1989), (Koditschek, 1987), (Byrnes and Isidori, 1989), (Sontag and Sussmann, 1988), (Kokotović and Sussmann, 1989), (Kokotović, 1991), (Saber et al., 1990), y un algoritmo de distribución de la fuerza de tracción global que calcula las señales de referencia adecuadas para cada una de las ruedas, de modo que el controlador conozca en tiempo real el par ideal requerido para cada rueda. Con esta estructura se consigue controlar la posición y la velocidad del robot móvil, y al mismo tiempo, distribuir la fuerza de tracción global entre las ruedas, evitando así el deslizamiento del robot.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el modelo de un robot tipo triciclo, sobre el cual se desarrolla el diseño del controlador. En la Sección 3 se describe el diseño del controlador cinemático y dinámico propuesto, mientras que en la Sección 4 se explica el algoritmo utilizado para la distribución de la fuerza de tracción global. La Sección 5 contiene algunos resultados experimentales que permiten evaluar el funcionamiento del controlador, y finalmente, la Sección 6 presenta las principales conclusiones y los trabajos futuros.

## 2. Modelo del robot

En esta sección se revisa el modelo del robot móvil tipo triciclo cuya representación esquemática se muestra en la Figura 1, con indicación de los parámetros y variables de interés. Cada una de las ruedas es accionada de forma independiente por medio de un motor dc; la rueda frontal lleva un motor dc adicional para controlar la rotación del vehículo. Se asume que las masas y las inercias de las ruedas son despreciables en comparación con las del cuerpo del robot.

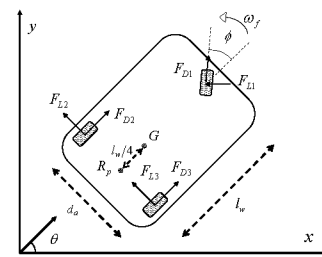


Figura 1: Configuración del robot móvil.

La posición del robot móvil a lo largo de una superficie plana o cuasi-plana en un marco inercial Cartesiano  $\{R_w\} := \{o, x, y\}$  queda definida por las coordenadas  $(x_C, y_C)$  del punto de referencia  $R_p$  y por  $\theta$ , la orientación del vehículo con respecto al eje  $x$ . Se asume que  $R_p$  está localizado en la intersección del eje virtual que une las ruedas traseras y el eje de simetría. Por otra parte,  $\phi$  representa el ángulo de giro entre la rueda frontal y el eje de simetría,  $d_a$  la longitud del eje virtual que une las

ruedas traseras,  $l_w$  la distancia entre la rueda frontal y  $R_p$ ,  $G$  el centro de gravedad del robot, situado a una distancia  $l_w/4$  del punto  $R_p$ , en el eje virtual que une la rueda frontal con el punto  $R_p$ ,  $(x_1, y_1)$  la posición de la rueda frontal, y  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  las posiciones de las ruedas traseras. Por tanto, la posición de cada rueda en el marco de referencia inercial está dada por:

$$x_1 = x_C + l_w \cos(\theta), \quad y_1 = y_C + l_w \sin(\theta), \quad (1)$$

$$x_2 = x_C - \frac{d_a}{2} \sin(\theta), \quad y_2 = y_C + \frac{d_a}{2} \cos(\theta), \quad (2)$$

$$x_3 = x_C + \frac{d_a}{2} \sin(\theta), \quad y_3 = y_C - \frac{d_a}{2} \cos(\theta). \quad (3)$$

Sus derivadas correspondientes son:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_C - l_w \dot{\theta} \sin(\theta), \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_C + l_w \dot{\theta} \cos(\theta), \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_C - \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \cos(\theta), \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_C - \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \sin(\theta), \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_C + \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \cos(\theta), \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_C + \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \sin(\theta). \quad (6)$$

Las restricciones de tipo no-holonómicas resultantes para cada rueda son:

$$\dot{x}_1 \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_1 \cos(\theta + \phi) = 0, \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 \sin(\theta) - \dot{y}_2 \cos(\theta) = 0, \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 \sin(\theta) - \dot{y}_3 \cos(\theta) = 0. \quad (9)$$

Sustituyendo  $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ ,  $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$  y  $(\dot{x}_3, \dot{y}_3)$  en (7), (8) y (9) da como resultado:

$$\dot{x}_C \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_C \cos(\theta + \phi) - l_w \dot{\theta} \cos(\phi) = 0, \quad (10)$$

$$\dot{x}_C \sin(\theta) - \dot{y}_C \cos(\theta) = 0. \quad (11)$$

Si  $v_c$  representa la velocidad lineal de  $R_p$  con respecto a  $\{R_w\}$ , entonces, las velocidades lineales de cada rueda con respecto a  $\{R_w\}$  están dadas por:

$$v_1 = \frac{v_c}{\cos \phi}, \quad (12)$$

$$v_2 = \left(1 - \frac{d_a}{2l_w} \tan \phi\right) v_c, \quad (13)$$

$$v_3 = \left(1 + \frac{d_a}{2l_w} \tan \phi\right) v_c. \quad (14)$$

$\dot{x}_C$  e  $\dot{y}_C$  también pueden ser definidas en función de  $v_c$  de la siguiente manera:

$$\dot{x}_C = v_c \cos(\theta), \quad (15)$$

$$\dot{y}_C = v_c \sin(\theta). \quad (16)$$

Si se sustituye (15) y (16), en (10) y (11) se obtiene como resultado:

$$\dot{\theta} = \frac{\tan \phi}{l_w} v_c. \quad (17)$$

La derivada de (17) está dada por:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tan(\phi)}{l_w} \dot{v}_c + \frac{v_c}{l_w \cos^2(\phi)} \dot{\phi}. \quad (18)$$

Si se supone que el modelo cinemático del robot móvil está compuesto por (15-17), se tendría al ángulo de giro  $\phi$  como una entrada, y se asumiría que se tiene control directo sobre este valor, lo que supondría poder mover la rueda frontal de forma instantánea. Como esta suposición no es válida, se considera al ángulo de giro como una variable de estado adicional, y a su derivada como una señal de entrada. Por tanto, se trabaja con un espacio de estado de cuatro dimensiones, en el cual, los estados son representados por  $x = (x_c, y_c, \theta, \phi)$ , quedando el modelo cinemático del robot móvil definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= v_c \cos(\theta) \\ \dot{y}_C &= v_c \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{\tan(\phi)}{l_w} v_c \\ \dot{\phi} &= \omega_f \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $\omega_f$  es la velocidad angular de giro de la rueda frontal.

Asumiendo que no existe fricción entre las ruedas y el vehículo, y que el eje de las ruedas traseras permanece inmóvil con respecto a la orientación del robot, el modelo dinámico resultante está dado por:

$$\sum F_x = F_{D1} \cos(\phi + \theta) + (F_{D2} + F_{D3}) \cos(\theta) - \quad (20)$$

$$F_{L1} \sin(\phi + \theta) - (F_{L2} + F_{L3}) \sin(\theta) - F_{FRW} \cos(\theta)$$

$$\sum F_y = F_{D1} \sin(\phi + \theta) + (F_{D2} + F_{D3}) \sin(\theta) + \quad (21)$$

$$F_{L1} \cos(\phi + \theta) + (F_{L2} + F_{L3}) \cos(\theta) - F_{FRW} \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z &= \frac{d_a}{2} (F_{D3} - F_{D2}) + l_w F_{D1} \sin(\phi) + \\ &l_w F_{L1} \cos(\theta) - M_{FR} \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $F_{D1}$ ,  $F_{D2}$  y  $F_{D3}$  son las fuerzas de tracción aplicadas en cada rueda,  $F_{L1}$ ,  $F_{L2}$  y  $F_{L3}$  son las fuerzas laterales resultantes en las ruedas frontal y traseras, respectivamente,  $F_{Fr}$  es la fuerza de fricción equivalente, y  $M_{FR}$  es el momento de fricción equivalente alrededor del punto  $R_p$ . Como la velocidad a la que se moverá el robot móvil será relativamente baja ( $v_{cmax} = 0.1 \text{ m/s}$ ), las fuerzas laterales,  $F_{L1}$ ,  $F_{L2}$  y  $F_{L3}$  son despreciadas de aquí en adelante por su influencia poco significativa. Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\sum M_z = J_w \ddot{\theta}, \quad (23)$$

donde  $J_w$  es la inercia equivalente del vehículo alrededor del punto  $R_p$ , y sustituyendo (18) y (23) en (22) se obtiene que:

$$\dot{v}_c = \frac{l_w}{J_w} \cot(\phi) \left[ l_w F_{D1} \sin(\phi) + \frac{d_a}{2} (F_{D3} - F_{D2}) - M_{FR} \right] - \dot{\phi} \cot(\phi) \sec^2(\phi) v_c. \quad (24)$$

El paso siguiente en el modelado dinámico del sistema consiste en encontrar las ecuaciones para las fuerzas de tracción. Como se sabe que las fuerzas de tracción son transmitidas al vehículo a través de los motores dc a controlar, se pueden modelar de la siguiente forma:

$$F_{D1} = \frac{K_G}{r_w} \tau_{ap1}, \quad (25)$$

$$F_{D2} = \lambda_{w2} F_{D1} \quad \text{y} \quad F_{D3} = \lambda_{w3} F_{D1}, \quad (26)$$

donde  $K_G$  es la relación de transmisión constante,  $r_w$  es el radio de la rueda,  $\tau_{ap1}$  es el par de tracción de la rueda delantera, y  $\lambda_{w2}$  y  $\lambda_{w3}$  son los coeficientes de distribución de los pares de tracción. Estos coeficientes,  $\lambda_{w2}$  y  $\lambda_{w3}$ , juegan un papel destacado en el diseño del sistema de control, y su inclusión será explicada en la Sección 3. El par de tracción de la rueda frontal  $\tau_{ap1}$  está dado por:

$$\tau_{ap1} = k_m I_1 - J_{M1} \ddot{\phi}_1 \quad (27)$$

donde  $k_m$  es la constante de par,  $I_1$  es la intensidad de corriente del motor,  $J_{M1}$  es la inercia del rotor y  $\ddot{\phi}_1$  es la aceleración angular del rotor. La intensidad de corriente  $I_1$  está dada por:

$$I_1 = \frac{1}{R_M} u_1 - \frac{k_E}{R_M} \dot{\phi}_1, \quad (28)$$

donde  $u_1$  es la entrada de tensión para el motor de tracción de la rueda frontal,  $R_M$  es la resistencia del motor, y  $k_E$  es la constante de fuerza contraelectromotriz.

La relación entre la velocidad lineal de la rueda frontal y la velocidad angular de su motor se puede expresar de la siguiente forma:

$$\dot{x}_1 = \frac{r_w}{K_G} \dot{\phi}_1 \cos(\phi + \theta), \quad \dot{y}_1 = \frac{r_w}{K_G} \dot{\phi}_1 \sin(\phi + \theta). \quad (29)$$

Combinando (4), (15), (16) y (29), se pueden obtener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} v_c \cos(\theta) - l_w \dot{\theta} \sin(\theta) &= \frac{r_w}{K_G} \dot{\phi}_1 \cos(\phi + \theta), \\ v_c \sin(\theta) + l_w \dot{\theta} \cos(\theta) &= \frac{r_w}{K_G} \dot{\phi}_1 \sin(\phi + \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Con estas expresiones se puede encontrar la relación entre la velocidad lineal del punto de referencia,  $v_c$ , y la velocidad angular del rotor de la rueda frontal,  $\dot{\phi}_1$ :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{K_G}{r_w \cos(\phi)} v_c. \quad (31)$$

La derivada de (31) está dada por:

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{K_G}{r_w \cos(\phi)} \left[ \dot{\phi} \tan(\phi) v_c + \dot{v}_c \right]. \quad (32)$$

Sustituyendo (25-26), (27) y (31-32) en (24) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \frac{\gamma_{wa}}{\gamma_{wb}} \left[ \frac{K_G k_m}{r_w R_M} u_1 - \frac{K_G^2 v_c}{r_w^2 \cos(\phi)} \zeta \right] \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_{wb}} \left[ M_{FR} + \frac{J_w}{l_w} \omega_f \sec^2(\phi) v_c \right] \end{aligned} \quad (33)$$

donde:

$$\zeta = \frac{k_m k_E}{R_M} + J_{M1} \omega_f \tan(\phi), \quad (34)$$

$$\gamma_{wa} = \frac{d_a}{2} (\lambda_{w3} - \lambda_{w2}) + l_w \sin(\phi), \quad (35)$$

$$\gamma_{wb} = \frac{J_w}{l_w} \tan(\phi) + \frac{K_G^2 J_{M1}}{r_w^2 \cos(\phi)} \gamma_{wa}. \quad (36)$$

El último paso consiste en encontrar la ecuación para el servo encargado de proporcionar la dirección al robot. Como la fuerza de giro también es transmitida al vehículo a través de un motor dc controlado, se puede modelar de la siguiente forma:

$$J_{M4} \ddot{\phi}_4 = \frac{k_m}{R_M} (u_4 - k_E \dot{\phi}_4) - \tau_{FR4}, \quad (37)$$

donde  $J_{M4}$  es la inercia del rotor,  $\ddot{\phi}_4$  es la aceleración angular del rotor,  $\dot{\phi}_4$  es la velocidad angular del rotor,  $u_4$  es la entrada de tensión para el motor de giro de la rueda frontal y  $\tau_{FR4}$  es el par de fricción. En este caso, la relación entre la velocidad angular de la rueda frontal y la velocidad angular de su motor está dada por:

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}_4}{K_G}. \quad (38)$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{\phi} = \omega_f$  y utilizando (37-38), la aceleración angular de la rueda frontal,  $\dot{\omega}_f$ , puede escribirse como:

$$\dot{\omega}_f = \frac{1}{J_{M4} K_G} \left( \frac{k_m}{R_M} u_4 - \frac{K_G k_m k_E \omega_f}{R_M} + \tau_{FR4} \right). \quad (39)$$

Por tanto, la dinámica del robot móvil está dada por (33) y (39).

### 3. Control cinemático y dinámico

Para diseñar el sistema de control propuesto, el primer paso consiste en obtener un controlador de seguimiento con realimentación del estado basado en el modelo cinemático (19) del robot. Como este punto ha sido extensamente tratado por un gran número de autores, en este trabajo se seguirá el método propuesto por (Lefer and Nijmeijer, 1999). En este método, que se describirá a continuación para un mejor entendimiento de los pasos posteriores requeridos en el diseño del controlador, la velocidad de avance del punto de referencia,  $v_c$ , y la velocidad angular de la rueda frontal,  $\omega_f$ , del modelo cinemático del robot (19), son consideradas como entradas de control. Así pues,

dada una trayectoria de referencia factible, como por ejemplo, una trayectoria  $([x_r, y_r, \theta_r, \phi_r]^T, [v_r, \omega_r]^T)$  que satisfaga:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= v_r \cos(\theta_r) \\ \dot{y}_r &= v_r \sin(\theta_r) \\ \dot{\theta}_r &= v_r \frac{\tan(\phi_r)}{l_w} \\ \dot{\phi}_r &= \omega_r\end{aligned}\quad (40)$$

es necesario encontrar leyes de control apropiadas que tengan la forma:

$$v_c = v_c(x_C, y_C, \theta, \phi, t), \quad \omega_f = \omega_f(x_C, y_C, \theta, \phi, t) \quad (41)$$

de modo que para el sistema de lazo cerrado resultante (19, 41):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|x_C(t) - x_r(t)| + |y_C(t) - y_r(t)| + |\theta(t) - \theta_r(t)| + |\phi(t) - \phi_r(t)|) = 0. \quad (42)$$

A continuación, se definen los errores  $x_C - x_r$  e  $y_C - y_r$  en un marco de coordenadas del cuerpo:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_C \\ y_r - y_C \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Con el objetivo de controlar la orientación,  $\theta$ , del robot móvil por medio de la entrada  $\omega_f$ , (Lefer and Nijmeijer, 1999) proponen que  $v_c(t) \neq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $v_r(t) \geq v_r^{\min} > 0$ , si  $\sigma(\cdot)$  es una función que cumple:

$$\sigma(x) > -v_r^{\min} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (44)$$

la ley de control

$$v_c = v_r + \sigma(x_e) \equiv \Phi_{w1}(t, x_e) \quad (45)$$

automáticamente garantiza que  $v_c(t) > 0$  para todo  $t \geq 0$ . Además, se asume que  $\sigma(x)$  es continuamente diferenciable y satisface que:

$$x\sigma(x) > 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (46)$$

Así pues, se escoge:

$$\sigma(x_e) = v_r^{\min} \tanh(x_e). \quad (47)$$

Con la ley de control (45), el sistema de error (43) y  $\phi$  pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= y_e \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi) + v_r \cos(\theta_e) - v_r - \sigma(x_e) \\ \dot{y}_e &= -x_e \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi) + v_r \sin(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \frac{v_r}{l_w} \tan(\phi_r) - \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi) \\ \dot{\phi} &= \omega_f.\end{aligned}\quad (48)$$

Diferenciando la función:

$$V_1 = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 \quad (49)$$

a lo largo de la solución de (48) se obtiene que:

$$\dot{V}_1 = -x_e \sigma(x_e) + v_r \beta_w \theta_e \quad (50)$$

donde

$$\beta_w = \left( \frac{\cos(\theta_e) - 1}{\theta_e} x_e + \frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} y_e \right). \quad (51)$$

Si se considera  $\phi$  como una entrada de control virtual, se puede definir una ley de control intermedia dada por:

$$\dot{\theta}_e = -k_{w1}\theta_e - k_{w2}v_r\beta_w \quad c_{w1}, c_{w2} > 0. \quad (52)$$

Con la función candidata de Lyapunov:

$$V_2 = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \frac{1}{2k_{w2}}\theta_e^2 \quad (53)$$

se puede afirmar que  $x_e, y_e$  y  $\theta_e$  convergen a cero, siempre que se satisfaga la suposición de que el sistema de referencia tiene una única solución  $(\phi_r \in ]-M, M[$  con  $M < \frac{\pi}{2}$ ), y que la referencia siempre se mueve en la dirección de avance con una velocidad acotada  $0 < v_r^{\min} \leq v_r(t) \leq v_r^{\max}$ .

A continuación, se define la variable de error:

$$\bar{z} = \frac{v_r}{l_w} \tan(\phi_r) - \frac{v_c}{l_w} \tan(\phi) + k_{w1}\theta_e + k_{w2}v_r\beta_w. \quad (54)$$

Para simplificar el análisis, también se usarán las siguientes definiciones:

$$z = l_w \bar{z}, \quad c_{w1} = l_w k_{w1}, \quad c_{w2} = l_w k_{w2}. \quad (55)$$

Por tanto, el sistema de error (48) queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= y_e \frac{v_c}{l_w} \tan(\phi) + v_r [\cos(\theta_e) - 1] - \sigma(x_e) \\ \dot{y}_e &= -x_e \frac{v_c}{l_w} \tan(\phi) + v_r \sin(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= -\frac{c_{w1}}{l_w} \theta_e - \frac{c_{w2}}{l_w} v_r \beta_w + \frac{1}{l_w} z \\ \dot{z} &= \frac{v_c}{\cos^2(\phi)} \left( \frac{t_{w1}(t) \sin(\phi) \cos(\phi)}{l_w} - \omega_f \right) + t_{w2}(t)\end{aligned}\quad (56)$$

donde:

$$t_{w1} = y_e \tan(\phi) + c_{w1} - c_{w2}v_r(\alpha_{w1}x_e + \alpha_{w2}y_e), \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
\iota_{w2} &= \dot{v}_r \tan(\phi_r) + \frac{v_r \omega_r}{\cos^2(\phi_r)} - v_c \tan(\phi) + \\
&v_r \cos(\theta_e) \tan(\phi) + c_{w2} \dot{v}_r y_e \frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} + \\
&c_{w2} (\dot{v}_r x_e - v_c v_r - v_r^2) \frac{\cos(\theta_e) - 1}{\theta_e} + \\
&(c_{w1} + c_{w2} v_r \alpha_{w3}) \frac{v_r}{l_w} \tan(\phi_r),
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\alpha_{w1} = \frac{1 - \cos(\theta_e)}{\theta_e^2}, \quad \alpha_{w2} = \frac{\theta_e - \sin(\theta_e)}{\theta_e^2}, \tag{59}$$

$$\alpha_{w3} = \left( \alpha_{w1} - \frac{\theta_e \sin(\theta_e)}{\theta_e^2} \right) x_e + \xi_1 y_e, \tag{60}$$

$$\xi_1 = \frac{\theta_e \cos(\theta_e) - \sin(\theta_e)}{\theta_e^2}. \tag{61}$$

A continuación se define una nueva función de Lyapunov,  $V_3$ , para el sistema (56), aumentando  $V_2$  con un término cuadrático en la variable de error  $\bar{z}$ :

$$\begin{aligned}
V_3 &= \frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2 + \frac{l_w}{2c_{w2}} \theta_e^2 + \frac{1}{2c_{w1}c_{w2}c_{w3}} \bar{z}^2 \\
&\text{con } c_{w3} > 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

Ahora, se elige  $\omega_f$  de tal forma que  $\dot{V}_3$  sea definida negativa. Una forma simple de conseguirlo es que:

$$\begin{aligned}
\omega_f &= \frac{\iota_{w1}}{l_w} \sin(\phi) \cos(\phi) + \frac{\cos^2(\phi)}{v_c} (\iota_{w2} + c_{w3} \bar{z}) \\
\omega_f &\equiv \Phi_{w2}(t, x_e, y_e, \theta_e).
\end{aligned} \tag{63}$$

Con esta ley, la derivada de la función de control de Lyapunov queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= -x_e \sigma(x_e) - \left[ \frac{\sqrt{c_{w1}}}{\sqrt{2c_{w2}}} \theta_e - \frac{1}{\sqrt{2c_{w1}c_{w2}}} \bar{z} \right]^2 - \\
&\frac{c_{w1}}{2c_{w2}} \theta_e^2 - \frac{1}{2c_{w1}c_{w2}} \bar{z}^2.
\end{aligned} \tag{64}$$

Entonces:

$$\dot{V}_3 \leq -x_e \sigma(x_e) - \frac{c_{w1}}{2c_{w2}} \theta_e^2 - \frac{1}{2c_{w1}c_{w2}} \bar{z}^2 \leq 0. \tag{65}$$

De (64) queda claro que todas las trayectorias de (56, 63) están acotadas global y uniformemente, y que todas las soluciones convergen a cero. Hasta aquí se ha seguido el método propuesto por (Lefer and Nijmeijer, 1999).

Una vez que se ha solucionado el problema de seguimiento para el modelo cinemático del robot móvil utilizando las velocidades  $v_c$  y  $\omega_f$  como entradas de control, el segundo paso es encontrar las leyes de control deseadas para las entradas reales  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ . Por tanto, es necesario realizar una extensión de la ley de control cinemático para incorporar la dinámica del robot móvil, por medio de la técnica de *backstepping* (Fierro and Lewis, 1997). Considere entonces la dinámica del error de seguimiento dada por (48) y por los dos integradores (33, 39):

$$\dot{x}_e = y_e \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi) + v_r \cos(\theta_e) - v_r - \sigma(x_e)$$

$$\dot{y}_e = -x_e \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi) + v_r \sin(\theta_e)$$

$$\dot{\theta}_e = \frac{v_r}{l_w} \tan(\phi_r) - \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \tan(\phi)$$

$$\dot{\phi} = \omega_f$$

$$\dot{v}_c = \frac{\gamma_{wa}}{\gamma_{wb}} \left[ \frac{K_G k_m}{r_w R_M} u_1 - \frac{K_G^2 v_c}{r_w^2 \cos(\phi)} \zeta \right]$$

$$- \frac{1}{\gamma_{wb}} \left[ M_{FR} + \frac{J_w}{l_w} \omega_f \sec^2(\phi) v_c \right]$$

$$\dot{\omega}_f = \frac{1}{J_{M4} K_G} \left( \frac{k_m}{R_M} u_4 - \frac{K_G k_m k_E \omega_f}{R_M} + \tau_{FR4} \right). \tag{66}$$

La idea básica consiste en derivar leyes de control adecuadas para  $u_1$  y  $u_4$  a partir de  $v_c$  y  $\omega_f$ , que controlan el sistema cinemático (19).

La inclusión de los coeficientes de distribución de la fuerza de tracción  $\lambda_{w2}$  y  $\lambda_{w3}$  (que están contenidos en los términos  $\gamma_{wa}$  y  $\gamma_{wb}$ ), es una de las principales aportaciones realizadas en el diseño del sistema de control, junto con el algoritmo de distribución de la fuerza de tracción global. Estos coeficiente permiten modelar las fuerzas de tracción aplicadas en las ruedas traseras,  $F_{D2}$  y  $F_{D3}$ , como un porcentaje de la fuerza de tracción aplicada en la rueda frontal,  $F_{D1}$ . Por tanto, la ley de control para  $u_1$  puede ser obtenida de forma independiente, pero sin despreciar los efectos de  $u_2$  y  $u_3$ . En la Sección 4 se obtienen las leyes de control para  $u_2$  y  $u_3$  utilizando el algoritmo propuesto para la distribución de la fuerza de tracción global, y se demuestra la estabilidad asintótica para el sistema de lazo cerrado completo.

Con el fin de diseñar las leyes de control para  $u_1$  y  $u_4$  utilizando la técnica del integrador *backstepping*, dos nuevas variables de error son introducidas,  $v_e$  y  $\omega_e$ :

$$v_e = v_c - \Phi_{w1}(t, x_e), \tag{67}$$

$$\omega_e = \omega_f - \Phi_{w2}(t, x_e, y_e, \theta_e), \tag{68}$$

donde  $\Phi_{w1}$  y  $\Phi_{w2}$  están definidas como en (45) y (63), respectivamente.

Ahora, considere la función candidata de Lyapunov definida positiva para el sistema (66):

$$W_1 = V_3 + \frac{1}{2}v_e^2 + \frac{1}{2}\omega_e^2. \quad (69)$$

Utilizando (64), la derivada en el tiempo de  $W_1$  a lo largo de las soluciones de (66) satisface que:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 = & -x_e \sigma(x_e) - \frac{c_{w1}}{c_{w2}} \theta_e^2 + \frac{1}{c_{w2}} \theta_e \dot{z} - \frac{1}{c_{w1}c_{w2}} \dot{z}^2 + \\ & v_e \left[ \frac{\gamma_{wa} K_G k_m}{\gamma_{wb} r_w R_M} u_1 - \frac{\gamma_{wa} K_G^2 v_c}{\gamma_{wb} r_w^2 \cos(\phi)} \dot{\zeta} - \right. \\ & \left. \frac{1}{\gamma_{wb}} \left( M_{FR} + \frac{J_w}{l_w} \omega_f \sec^2(\phi) v_c \right) - \dot{\Phi}_{w1} \right] + \\ & \frac{\omega_e}{J_{M4}} \left( \frac{k_m u_4}{K_G R_M} - \frac{k_m k_E \omega_f}{R_M} + \frac{\tau_{FR4}}{K_G} - J_{M4} \dot{\Phi}_{w2} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{w1} = & \dot{v}_r + \varsigma y_e \tan(\phi) \left( \frac{v_r + \sigma(x_e)}{l_w} \right) + \\ & \varsigma (v_r \cos(\theta_e) - v_r - \sigma(x_e)), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{w2} = & \frac{1}{l_w} \left[ (i_{w1} \sin(\phi) + i_{w1} \cos(\phi) \omega_f) \cos(\phi) - \right. \\ & \left. i_{w1} \sin^2(\phi) \omega_f \right] + \frac{\cos^2(\phi)}{v_c} [i_{w2} + c_{w3} \dot{z} - \\ & (2 \tan(\phi) \omega_f v_c + \dot{v}_c) (i_{w2} + c_{w3} \dot{z})], \end{aligned} \quad (72)$$

y:

$$\varsigma = v_r^{\min} (1 - \tan^2(x_e)), \quad (73)$$

$$i_{w1} = \dot{y}_e \tan(\phi) + \frac{y_e \omega_f}{\cos^2(\phi)} - c_{w2} \dot{v}_r (\alpha_{w1} x_e + \alpha_{w2} y_e) \quad (74)$$

$$-c_{w2} v_r (\dot{\alpha}_{w1} x_e + \alpha_{w1} \dot{x}_e + \dot{\alpha}_{w2} y_e + \alpha_{w2} \dot{y}_e),$$

$$\begin{aligned} i_{w2} = & \frac{\dot{v}_r l_w + c_{w1} \dot{v}_r + c_{w2} v_r^2 \dot{\alpha}_{w3}}{l_w} \tan(\phi_r) + \\ & \frac{c_{w1} v_r \omega_r}{l_w \cos^2(\phi_r)} + c_{w2} (\dot{v}_r \beta_w + \dot{v}_r \dot{\beta}_w) + \\ & \frac{2 \dot{v}_r \omega_r + v_r \dot{\omega}_r + 2 v_r \omega_r^2 \tan(\phi_r)}{\cos^2(\phi_r)} + \end{aligned} \quad (75)$$

$$\frac{c_{w2} v_r}{l_w} \left[ 2 \dot{v}_r \tan(\phi_r) + \frac{v_r \omega_r}{\cos^2(\phi_r)} \right] \alpha_{w5} -$$

$$c_{w2} [2 v_r \dot{v}_r + \dot{v}_c v_r + v_c \dot{v}_r] \alpha_{w4} +$$

$$(\dot{v}_r \cos(\theta_e) - v_r \sin(\theta_e) \dot{\theta}_e - \dot{v}_c) \tan(\phi) -$$

$$c_{w2} (v_r^2 + v_c v_r) \dot{\alpha}_{w4},$$

$$\alpha_{w4} = \frac{\cos(\theta_e) - 1}{\theta_e}, \quad (76)$$

$$\alpha_{w5} = \alpha_{w3} \frac{(v_r \cos(\theta_e) - v_c) \omega_f}{\cos^2(\phi)}, \quad (77)$$

$$\dot{\alpha}_{w1} = \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e^3} [\theta_e \sin(\theta_e) + 2 \cos(\theta_e) - 2], \quad (78)$$

$$\dot{\alpha}_{w2} = \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e^3} [2 \sin(\theta_e) - \theta_e \cos(\theta_e) - \theta_e], \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{w3} = & \frac{1 - \theta_e \sin(\theta_e) - \cos(\theta_e)}{\theta_e^2} \left( \dot{x}_e - 2 \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e} x_e \right) \\ & + \frac{\theta_e \cos(\theta_e) - \sin(\theta_e)}{\theta_e^2} \left( \dot{y}_e - 2 \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e} y_e \right) \end{aligned} \quad (80)$$

$$- \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e} (x_e \cos(\theta_e) + y_e \sin(\theta_e)),$$

$$\dot{\alpha}_{w4} = \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e^2} (1 - \theta_e \sin(\theta_e) - \cos(\theta_e)), \quad (81)$$

$$\dot{\beta}_w = - \frac{\dot{\theta}_e}{\theta_e} (\beta_z + \delta_z \theta_e - y_e) + \frac{\cos(\theta_e) - 1}{\theta_e} \dot{x}_e + \frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} \dot{y}_e. \quad (82)$$

Si se permite que  $\dot{W}_1$  sea una función explícita de  $u_1$  y  $u_4$ , se pueden elegir las leyes de control de seguimiento para  $u_1$  y  $u_4$  de tal modo que  $\dot{W}_1$  sea definida negativa. Una forma simple de conseguirlo es la siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{R_M K_G v_c}{\rho k_m \cos^2(\phi)} \left( \frac{k_m k_E}{R_M} + J_{M1} \omega_f \tan(\phi) \right) \\ & + \frac{1}{\gamma_{wa}} \left( M_{FR} + \frac{J_w}{l_w} \omega_f \sec^2(\phi) v_c \right) + \\ & \frac{\gamma_{wb}}{\gamma_{wa}} (\dot{\Phi}_{w1} - c_{w4} v_e), \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} u_4 = & \frac{R_M}{k_m} \tau_{FR4} + \frac{J_w K_G R_M}{k_m} (\dot{\Phi}_{w2} - c_{w5} \omega_e) + \\ & K_G k_E \omega_f. \end{aligned} \quad (84)$$

Con estas leyes de control, la derivada de la función candidata de Lyapunov queda de la siguiente forma:

$$\dot{W}_1 \leq -x_e \sigma(x_e) - \frac{c_{w1}}{2c_{w2}} \theta_e^2 - \frac{1}{2c_{w1}c_{w2}} \dot{z}^2 - \quad (85)$$

$$c_{w4} v_e^2 - c_{w5} \omega_e^2 \leq 0.$$

Por tanto, si  $c_{w4}, c_{w5} > 0$ , la estabilidad asintótica que fue originalmente obtenida con el controlador cinemático es preservada para el sistema de lazo cerrado completo.

#### 4. Algoritmo para la distribución de la fuerza de tracción

Para mantener la velocidad de avance deseada durante el movimiento del robot, se requiere una fuerza de tracción global específica  $\vec{F}_{DG}$ . Debido a la configuración del robot móvil seleccionada, existe la posibilidad de distribuir esta fuerza de tracción global  $\vec{F}_{DG}$  entre las tres ruedas:

$$\vec{F}_{DG} = \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{D2} + \vec{F}_{D3}. \quad (86)$$

Por tanto, el objetivo en esta sección es presentar un nuevo algoritmo que distribuye la fuerza de tracción global entre las ruedas y reduce las posibilidades de deslizamiento. El algoritmo propone una distribución basada en la idea de que el par de carga es proporcional al par de carga límite de cada rueda:

$$\frac{\tau_{ap1}}{T_{ap1}} = \frac{\tau_{ap2}}{T_{ap2}} = \frac{\tau_{ap3}}{T_{ap3}} \quad (87)$$

donde  $\tau_{ap1}$ ,  $\tau_{ap2}$ ,  $\tau_{ap3}$  son los pares de carga aplicados en cada rueda, y  $T_{ap1}$ ,  $T_{ap2}$ ,  $T_{ap3}$  son los pares de carga límite.

Si un motor encargado de accionar una rueda que se encuentra en contacto con una superficie desarrolla un par mayor que el correspondiente a la máxima fuerza de fricción estática entre la rueda y la superficie, la rueda desliza y no avanza de forma eficiente. Por tanto, el par de carga máximo posible de cada motor está relacionado con la máxima fuerza de fricción estática posible y es la magnitud del par a partir de la cual comienzan a manifestarse las condiciones de deslizamiento. Si se instalan sensores de fuerza en cada rueda, el par de carga máximo real puede ser calculado mediante la ecuación:

$$Tr_i = N_i \mu r_w \quad \forall i, \quad i = 1 - 3 \quad (88)$$

donde  $N$  es la fuerza normal y  $\mu$  es el coeficiente de fricción estática. Debido al riesgo de operar demasiado cerca del par de carga máximo real, se impone un margen de seguridad para el robot móvil definiendo un par de carga límite  $T_{api}$  más pequeño que el par de carga máximo real  $Tr_i$ .

Así pues, el algoritmo de seguimiento propuesto controla los pares de carga de los motores de tracción de las ruedas traseras, de tal forma que la magnitud del par de carga medido en la rueda frontal es utilizado para minimizar la siguiente función de error:

$$\tau_{ei} = \tau_{api} - \tau_{ap1} \cdot \frac{T_{api}}{T_{ap1}} \quad \forall i, \quad i = 2 - 3 \quad (89)$$

donde  $\tau_{api}$  es el par de carga en la rueda  $i$ , y  $T_{api}$  es el par de carga máximo posible en la rueda  $i$ .

La relación  $\frac{T_{api}}{T_{ap1}}$  se define como el coeficiente de distribución de la fuerza de tracción  $\lambda_{wi}$ . La magnitud de este coeficiente  $\lambda_{wi}$ , está relacionado con la distribución de las fuerzas normales. Recuerde que en la Sección 3, los coeficientes  $\lambda_{w2}$  y

$\lambda_{w3}$  permitían modelar las fuerzas de tracción aplicadas en las ruedas traseras como un porcentaje de la fuerza de tracción aplicada en la rueda delantera. De este modo, fue posible derivar la ley de control para  $u_1$  teniendo en cuenta los efectos indirectos de  $u_2$  y  $u_3$ . Ahora, se desea diseñar las leyes de control para  $u_2$  y  $u_3$  que garanticen un seguimiento asintótico de los pares de carga de referencia definidos por el algoritmo de distribución de la fuerza de tracción. Asumiendo que los pares de carga son aproximadamente iguales a los pares internos del motor (movimiento del robot a bajas velocidades), y que estos últimos son proporcionales a las intensidades de corriente en los inducidos de los motores, es posible trabajar con las intensidades de corriente  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , en lugar de con los pares aplicados  $\tau_{ap1}$ ,  $\tau_{ap2}$ ,  $\tau_{ap3}$ , simplificando de esta forma el diseño de las leyes de control para  $u_2$  y  $u_3$ . Por tanto, los errores de seguimiento vendrán dados por:

$$e_2 = I_2 - \lambda_{w2} I_1, \quad (90)$$

$$e_3 = I_3 - \lambda_{w3} I_1. \quad (91)$$

En este punto, resulta conveniente encontrar la relación entre la velocidad lineal del punto de referencia,  $v_c$  y las velocidades angulares de los rotores de las ruedas traseras,  $\dot{\varphi}_2$  y  $\dot{\varphi}_3$ . Combinando las ecuaciones (5), (6), (15), (16) con :

$$\dot{x}_i = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_i \cos(\theta), \quad \forall i, \quad i = 2, 3 \quad (92)$$

$$\dot{y}_i = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_i \sin(\theta), \quad \forall i, \quad i = 2, 3 \quad (93)$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$v_c \cos(\theta) - \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_2 \cos(\theta), \quad (94)$$

$$v_c \sin(\theta) - \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_2 \sin(\theta),$$

$$\cos(\theta) + \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_2 \cos(\theta), \quad (95)$$

$$v_c \sin(\theta) + \frac{d_a}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) = \frac{r_w}{K_G} \dot{\varphi}_2 \sin(\theta).$$

De estas igualdades se puede deducir que:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{K_G}{r_w} \left( 1 - \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} \right) v_c, \quad (96)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{K_G}{r_w} \left( 1 + \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} \right) v_c. \quad (97)$$

Ahora, las derivadas de (90) y (91) pueden escribirse como:

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{l_w} \left[ \frac{k_E K_G v_c}{r_w} \left( \frac{\lambda_{w2}}{\cos(\phi)} - 1 + \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} \right) + \right. \quad (98)$$

$$\left. u_2 - \lambda_{w2} u_1 - R_M e_2 \right],$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{l_w} \left[ \frac{k_E K_G v_c}{r_w} \left( \frac{\lambda_{w3}}{\cos(\phi)} - 1 - \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} \right) + \right. \quad (99)$$

$$\left. u_3 - \lambda_{w3} u_1 - R_M e_3 \right].$$



Si se selecciona:

$$W_2 = W_1 + \frac{l_w}{2} (e_2^2 + e_3^2) \quad (100)$$

como una función candidata de Lyapunov definida positiva para el sistema (66, 98, 99), y se hace que :

$$u_2 = \frac{k_E K_G v_c}{r_w} \left( 1 - \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} - \frac{\lambda_{w2}}{\cos(\phi)} \right) + \lambda_{w2} u_1 - c_{w6} e_2, \quad (101)$$

$$u_3 = \frac{k_E K_G v_c}{r_w} \left( 1 + \frac{d_a \tan(\phi)}{2l_w} - \frac{\lambda_{w3}}{\cos(\phi)} \right) + \lambda_{w3} u_1 - c_{w7} e_3, \quad (102)$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 \leq & -x_e \sigma(x_e) - \frac{c_{w1}}{2c_{w2}} \theta_e^2 - \frac{1}{2c_{w1}c_{w2}} z^2 - \\ & c_{w4} v_e^2 - c_{w5} \omega_e^2 - (R_M + c_{w6}) e_2^2 - \\ & (R_M + c_{w7}) e_3^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (103)$$

donde  $c_{w6}, c_{w7} > 0$ . Esto implica estabilidad asintótica de acuerdo al teorema de estabilidad de Lyapunov. Observe que el objetivo principal del algoritmo de distribución propuesto es definir los pares de referencia adecuados para cada una de las ruedas traseras y garantizar su seguimiento asintótico.

Para prevenir un exceso de fuerza de tracción que pueda producir deslizamientos durante el movimiento del robot, el algoritmo de control verifica que el par de carga aplicado a cada rueda no exceda su par de carga límite correspondiente  $\tau_{api}$ . No obstante, la situación planteada es bastante peculiar. Mientras los pares de carga del motor de tracción  $\tau_{api}$  permanezcan dentro de ciertos límites, las tensiones aplicadas a los motores de tracción pueden ser modificadas por el controlador de velocidad de la rueda frontal y por los controladores de fuerza de las ruedas traseras. No obstante, cuando uno de los pares de carga del motor de tracción  $\tau_{api}$  empieza a ser igual a la magnitud límite, es necesario mantener todas las tensiones de los motores, ignorando las condiciones establecidas por el control de velocidad y el control de fuerza de las ruedas frontales y traseras respectivamente. Es importante señalar que si el sistema de control empezase a incrementar la tensión, esto no conllevaría un incremento de la velocidad, sino sólo la aparición de condiciones de deslizamientos en una o varias ruedas. Por tanto, esta tensión tiene que ser mantenida hasta el momento en el que la tensión requerida para mantener la velocidad de avance sea menor que la tensión necesaria para soportar el par de carga límite. Anteriormente, durante el diseño del controlador cinemático se asumió que el sistema de referencia siempre se mueve en la dirección de avance con una velocidad acotada tal

que  $0 < v_r^{\min} \leq v_r(t) \leq v_r^{\max}$ . Por tanto, para evitar la pérdida de estabilidad en la situación planteada,  $v_r^{\max}$  debe ser seleccionada teniendo en cuenta los valores de  $T_{api}$ .

## 5. Resultados

Para evaluar el método propuesto se lleva a cabo una implementación en tiempo real del sistema de control propuesto y se realizan numerosas pruebas experimentales utilizando un prototipo del robot móvil. El prototipo consta de tres ruedas que son controladas de forma independiente por tres motores de idénticos. La rueda frontal consta además de un motor de adicional para giro. La Tabla 1 muestra los valores de los parámetros de cada uno de los motores. El prototipo tiene una longitud de 0.65m, un ancho de 0.5m, una masa de 36Kg y un momento de inercia de 2Kgm<sup>2</sup> alrededor de su centro de masa. Las ganancias utilizadas para los controladores (83), (101), (102) y (84) son:  $c_{w1} = c_{w2} = 0.56$ ,  $c_{w3} = 7$ ,  $c_{w4} = 10$ ,  $c_{w5} = 3$ ,  $c_{w6} = c_{w7} = 2$ . La Tabla 2 muestra el resto de los parámetros del prototipo utilizado.

Tabla 1: Parámetros de los motores de

Parámetros	Valores
$R_M$	0.6Ω
$k_m$	0.0333 Nm/A
$k_E$	0.0425 Vrad/s
$k_G$	246
$J_{M1} = J_{M2} = J_{M3} = J_{M4}$	0.000011Kgm <sup>2</sup>

Tabla 2: Parámetros del prototipo

Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
$m_w$	36Kg	$J_w$	2Kgm <sup>2</sup>
$d_a$	0.21m	$l_w$	0.56m
$r_w$	0.05m	$\mu$	0.1

La posición y orientación global del robot móvil se obtiene con una unidad de medida inercial que incluye tres acelerómetros, tres giróscopos y tres magnetómetros, y que proporciona con una respuesta altamente dinámica, la orientación 3D junto con las aceleraciones 3D, las velocidades angulares 3D y la orientación 3D en el campo magnético terrestre. Además, cada uno de los motores de corriente continua tiene acoplado un codificador óptico incremental y un sensor para medir la intensidad de corriente.

En un primer experimento, el robot fue programado para realizar una trayectoria circular sobre un plano con una inclinación de 5° (placa de acero mojada con agua), con  $v_r(t) = 0.0305$ m/s,  $\phi_r(t) = 45^\circ$ , y de tal forma que los pares de carga de los motores de tracción de las ruedas traseras fuesen iguales al par de carga medido en la rueda frontal. Esto significa

una distribución de la fuerza de tracción de 1:1:1. Adicionalmente, el robot tenía que moverse sobre dos obstáculos de 1cm de altura. La inclinación del plano se introduce como una perturbación, ya que con el plano inclinado se reducen las fuerzas normales y consecuentemente, la tracción del robot móvil con ruedas. La Fig. 2 muestra el desempeño del sistema de control en el plano  $x - y$ . La Fig. 3(a) y la Fig. 3(b) ilustran la evolución temporal de  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente. La Fig. 3(c) muestra el comportamiento de la velocidad en el punto  $R_p$  mientras que la Fig. 3(d) muestra las intensidades de corriente de los motores de tracción. En todas estas gráficas y en las siguientes, las líneas punteadas representan los valores deseados mientras las líneas sólidas representan los valores reales. Es interesante remarcar que todas las intensidades de corriente en los motores de tracción son prácticamente iguales mientras el robot está realizando el giro. La mayoría de las variables de estado exhiben un seguimiento casi perfecto de sus valores de referencia, con excepción de  $\phi$ . No obstante, su error de seguimiento cae rápidamente a cero transcurridos unos segundos.

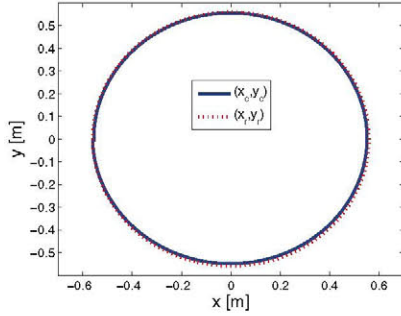
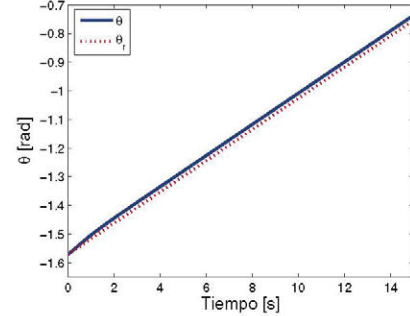


Figura 2: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.0305\text{m/s}$ ,  $\phi_r(t) = 45^\circ$  e  $I_2 = I_3 = I_1$ .

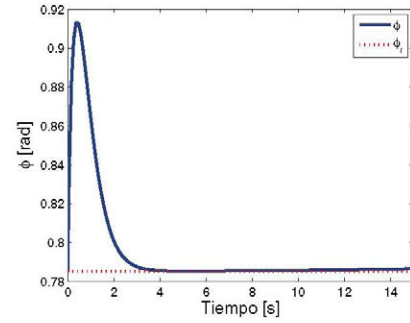
En el segundo experimento, el robot fue programado para moverse sobre un plano con una inclinación de  $5^\circ$  (placa de acero mojada con agua), con  $v_r(t) = 0.0436\text{m/s}$  y con una distribución de la fuerza de tracción de 1:0.9:0.7. Además, el robot tenía que sobrepasar nuevamente dos obstáculos. La Fig. 4(a) y la Fig. 4(b) muestran la evolución temporal de  $x_c$  e  $y_c$  respectivamente. La Fig. 4(c) muestra la velocidad deseada y medida del punto de referencia  $R_p$ , mientras que la Fig. 4(d) muestra las intensidades de corriente de los motores de tracción. Los resultados muestran un buen seguimiento de la trayectoria de referencia, con la distribución de fuerzas elegida y ante la presencia de obstáculos.

La Fig. 5 muestra el desempeño del sistema de control en el plano  $x - y$  para diferentes condiciones iniciales. El robot se programó para moverse sobre un plano horizontal (suelo del laboratorio en condiciones normales) con  $v_r(t) = 0.04\text{m/s}$ ,  $\phi_r(t) = 25^\circ$  y con una distribución de la fuerza de tracción de 1 : 1 : 1. El punto de partida de la trayectoria de referencia está dado por  $(x_r(0), y_r(0), \theta_r(0)) = (-1.2009, 0, -\pi/2)$ . En la Fig. 5(a) se puede observar que el robot empieza en el punto

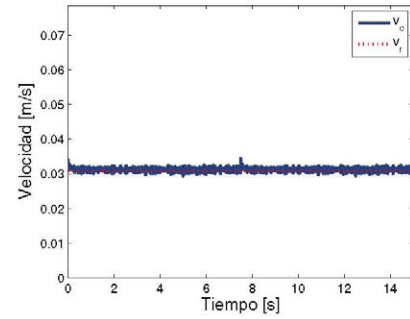
$(x_c(0), y_c(0), \theta(0)) = (-0.8, 0.5, -\pi/2)$ . Por tanto, el error inicial es  $(0.4009, 0.5, 0)$ . En la Fig. 5(b) se puede apreciar que el robot comienza en el punto  $(x_c(0), y_c(0), \theta(0)) = (-1.5, 0.3, -\pi/2)$ . Esto significa que el error inicial es  $(-0.2991, 0.3, 0)$ .



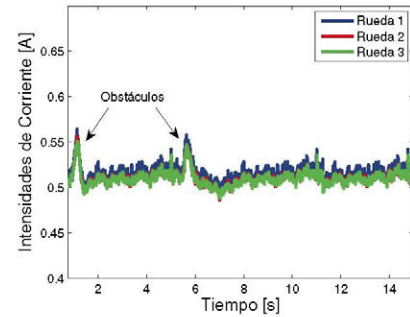
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.0305\text{m/s}$ ,  $\phi_r(t) = 45^\circ$  e  $I_2 = I_3 = I_1$ .

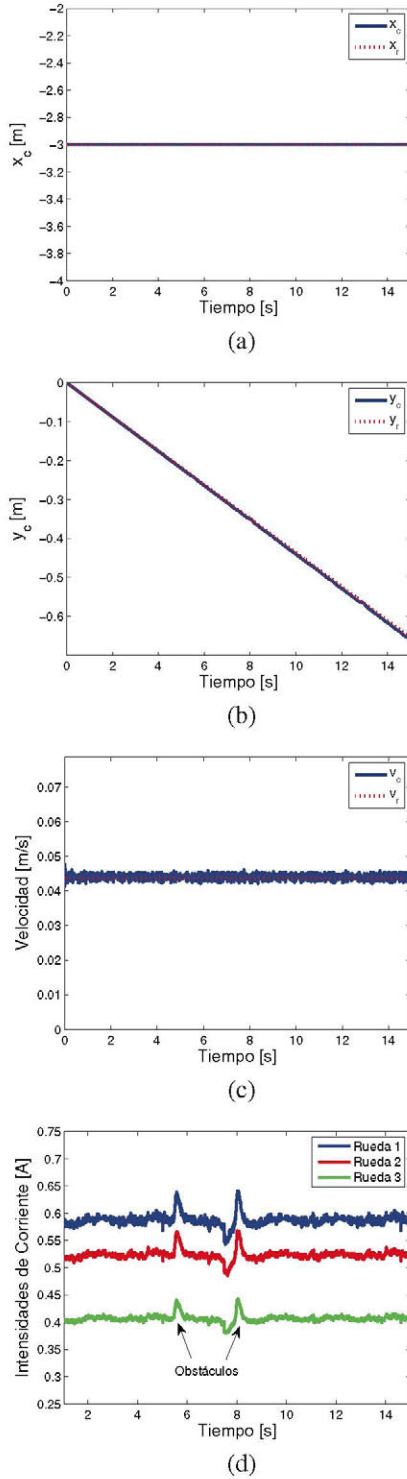


Figura 4: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.0436\text{m/s}$ ,  $\phi_r(t) = 0^\circ$ ,  $I_2 = 0.9 I_1$  e  $I_3 = 0.7 I_1$ .

Finalmente, con el objetivo de validar la capacidad del sistema de control para evitar el deslizamiento del robot en superficies con un bajo coeficiente de fricción estática, se presentan

a continuación los resultados obtenidos en dos experimentos realizados de forma consecutiva y en las mismas condiciones, pero con diferentes distribuciones de la fuerza de tracción. El robot se programó en ambos casos para realizar una trayectoria en línea recta sobre un plano con una inclinación de  $15^\circ$  (placa de acero mojada con agua), y con  $v_r(t) = 0.05\text{m/s}$ . En el primer experimento, la distribución de la fuerza de tracción fue de 1:1:1, mientras que en el segundo experimento fue de 1:2.5:2.5. En la Fig. 6 puede apreciarse que con una distribución equitativa de los pares de tracción, el robot experimenta pérdidas de tracción que le impiden mantener en varios intervalos de tiempo la velocidad lineal deseada, lo que se traduce en un seguimiento poco satisfactorio de la trayectoria rectilínea de referencia. No obstante, la Fig. 7 muestra que cambiando la distribución de la fuerza de tracción de 1:1:1 a 1:2.5:2.5, se consigue una mejora significativa de la tracción, evitando que el robot experimente deslizamientos, y consiguiendo un seguimiento satisfactorio de la trayectoria rectilínea deseada.

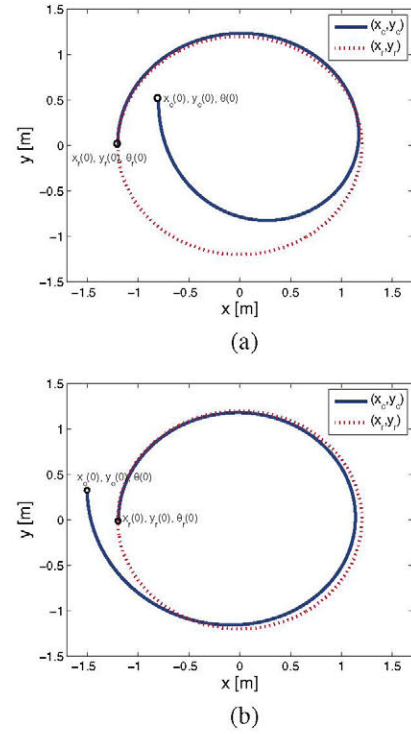
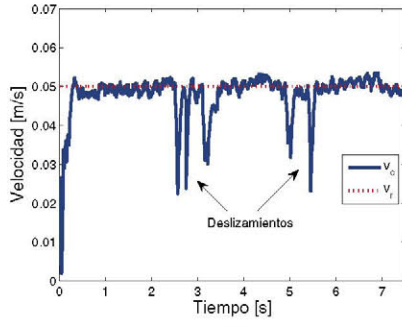
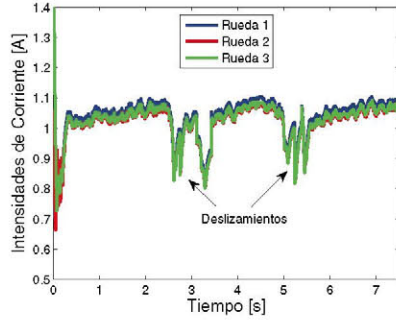


Figura 5: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.04\text{m/s}$ ,  $\phi_r(t) = 25^\circ$  e  $I_2 = I_3 = I_1$  para diferentes condiciones iniciales.

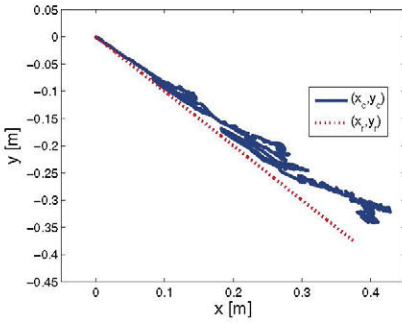
Los resultados presentados muestran la aplicabilidad práctica y el buen rendimiento del controlador propuesto. En todos los experimentos realizados la distribución de la fuerza de tracción global se ha llevado a cabo de forma experimental, tomando como valores iniciales los obtenidos en las simulaciones realizadas previamente, y ajustando posteriormente dichos valores mediante prueba y error. No obstante, es posible dotar al robot móvil con sensores que permitan estimar las condiciones reales del terreno y utilizar esta información para ajustar en tiempo



(a)

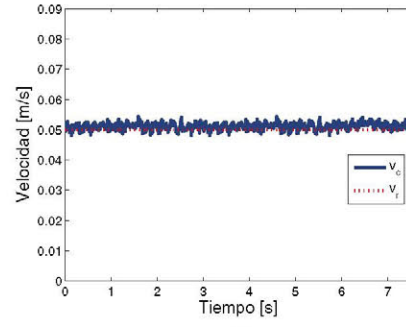


(b)

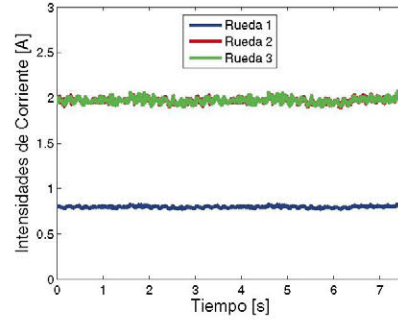


(c)

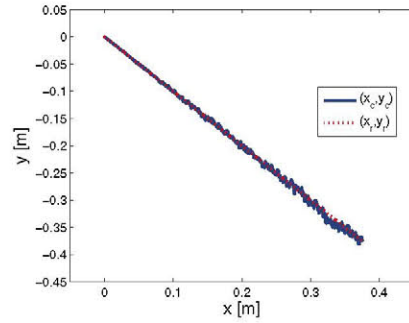
Figura 6: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.05\text{m/s}$ , e  $I_1 = I_2 = I_3$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 7: Resultados experimentales con  $v_r(t) = 0.05\text{m/s}$ , e  $I_2 = I_3 = 2.5I_1$ .

real los coeficientes de distribución  $l_{w2}$  y  $l_{w3}$ .

## 6. Conclusiones y trabajos futuros

Con el fin de mejorar la tracción de los robots móviles con ruedas que se desplacen sobre superficies con un bajo coeficiente de fricción estática, en este trabajo se ha propuesto la utilización de una configuración especial para el robot móvil, en la que todas las ruedas son accionadas de forma independiente, y una estructura de control cuyo diseño consta de tres partes bien diferenciadas: un controlador de seguimiento con realimentación de estado basado en el modelo cinemático del robot, una extensión de la ley de control cinemático resultante

para incorporar la dinámica del robot móvil utilizando *backstepping*, y un algoritmo de distribución de la fuerza de tracción global, que calcula las señales de referencia adecuadas para cada una de las ruedas. La efectividad y aplicabilidad de la metodología propuesta ha sido confirmada mediante pruebas experimentales. En cada una de las situaciones estudiadas fue posible distribuir la fuerza de tracción global mientras se llevaba a cabo el seguimiento asintótico de las posiciones y las velocidades de referencia, lográndose además, un significativo aumento de la fuerza de tracción máxima posible sin que apareciesen condiciones de deslizamiento en las ruedas. Por tanto, la configuración propuesta resulta ser bastante útil para superficies con un bajo coeficiente de fricción estática.

En trabajos futuros se dotará al robot móvil con sensores



que permitan estimar las condiciones reales del terreno y utilizar esta información para ajustar en tiempo real los coeficientes de distribución de las fuerzas de tracción. Entre los sensores que podrían utilizarse para este fin están las cámaras multispectrales (NIR-*Near InfraRed*, SWIR-*Short-Wave InfraRed*, LWIR-*Long-Wave InfraRed*) y los radares penetrantes a tierra (GPRs-*Ground Penetrating Radars*). También se abordará la definición de índices de rendimiento que nos permitan realizar un estudio comparativo del método propuesto con otros métodos anteriormente presentados.

## English Summary

### Traction Control for Wheeled Mobile Robots

#### Abstract

This article presents a solution to improve the performance of wheeled mobile robots that move upon surfaces with small coefficient of static friction. In these circumstances the wheeled mobile robots can experience loss of traction and therefore, slide along the surface. The proposed solution implies the use of a special configuration for the mobile robot, in which all the wheels are driven independently, and a control structure which consists of three distinct parts: firstly, a state-feedback tracking controller based on the kinematic model of the mobile robot is derived. Secondly, an extension of the kinematic control law is made to incorporate the dynamics of the wheeled mobile robot via backstepping. Thirdly, a traction force distribution algorithm that calculates the proper reference signals for each rear wheel is included and the feedback tracking control laws are finally completed. With this solution is possible to control the position and the velocity of the wheeled mobile robot but, at the same time, to distribute the traction force between the wheels in such a way that their sliding is avoided. The effectiveness and usefulness of the designed control algorithms are demonstrated in laboratory experiments using a prototype of the wheeled mobile robot.

#### Keywords:

Wheeled mobile robots, traction force distribution, nonlinear control, slide, static friction coefficient.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto ROBOCITY 2030-II S2009/DPI-1559, subvencionado por la Di-

rección General de Investigación de la Consejería de Educación y Cultura de la Comunidad de Madrid. Roemi Fernández agradece el apoyo recibido por el CSIC bajo el Programa JAE-DOC.

## Referencias

- Anwar, S., 2003. Brake based vehicle traction control via generalized predictive algorithm. SAE Transactions Journal of Passenger Cars: Mechanical Systems 112, 296–303.
- Balaram, J., 2000. Kinematic state estimation for a mars rover. Robotica 18, 251–262.
- Boh, T., Bradbeer, R. S., Hodgson, P., 2010. Terramechanics based traction control of underwater wheeled robot. In: IEEE Oceans 2010. Sydney, Australia, pp. 1–3.
- Byrnes, C., Isidori, A., 1989. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. Systems & Control Letters 12, 437–442.
- Chen, B., Chu, C., 2010. Fuzzy sliding mode control of traction control system for electric scooter. In: IEEE 2010 Seventh International Conference on Fuzzy Systems and knowledge Discovery (FSKD 2010). pp. 691–695.
- Chen, G., Zong, C., Zhang, Q., He, L., 2011. The study of traction control system for omni-directional electric vehicle. In: IEEE 2011 International Conference on Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer (MEC). Jilin, China, pp. 1590–1593.
- Fierro, R., Lewis, F. L., 1997. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. Journal of Robotic Systems 14 (3), 149–163.
- Iagnemma, K., Dubowsky, S., 2004. Mobile Robot in Rough Terrain: Estimation, Motion Planning, and Control with Application to Planetary Rovers. Berlin: Springer.
- Jones, D. R., Stol, K. A., 2010. Modelling and stability control of two-wheeled robots in low-traction environments. In: Australasian Conference on Robotics and Automation. Brisbane, Australia.
- Koditschek, D. E., 1987. Adaptive techniques for mechanical systems. In: Proceedings of the 5<sup>th</sup> Yale Workshop on Adaptive Systems. New Haven, CT.
- Kokotović, P., Sussmann, H., 1989. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. Systems & Control Letters 19, 177–185.
- Kokotović, P. V., 1991. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. IEEE Control Systems Magazine 12, 7–17.
- Lefer, E., Nijmeijer, H., 1999. Adaptive tracking control of nonholonomic systems: an example. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, Arizona, USA, pp. 2094–2099.
- Lei, Z., Cui, P., Ju, H., Peng, X., 2008. Traction control on loose soil for a redundantly actuated mobile robot. In: Xiong, C., Huang, Y., Xiong, Y., Liu, H. (Eds.), Intelligent Robotics and Applications. Vol. 5314 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin - Heidelberg, pp. 1155–1164.
- Liu, Z., Shi, Y., Chen, H., Zhang, X., 2010. Modeling and simulation of fuzzy control to traction control system of the four-wheel-drive vehicle. In: IEEE 2010 2<sup>nd</sup> International Conference on Future Computer and Communication (ICFCC). Vol. 2. Wuhan, pp. 92–95.
- Ojeda, L., Borenstein, J., 2004. Methods for the reduction of odometry errors in over-constrained mobile robots. Autonomous Robots 16, 273–286.
- Saberi, A., Kokotović, P., Sussmann, H., 1990. Global stabilization of partially linear composite systems. SIAM Journal of Control and Optimization 1990, 1491–1503.
- Sakai, S., S. H., Hori, Y., 1999. Motion control in an electric vehicle with four independently driven in-wheel motors. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 4 (1), 9–16.
- Sontag, E., Sussmann, H., 1988. Further comments on the stabilizability on the angular velocity of a rigid body. Systems & Control Letters 12, 213–217.
- Tsinias, J., 1989. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. Mathematics of Control, Signals, and Systems 2, 343–357.
- Waldron, K. J., Abdallah, M. E., 2007. An optimal traction control scheme for off-road operation of robotic vehicles. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 12 (2), 126–133.
- Yoshida, K.; Hamano, H. W. T., 2003. Slip-based traction control of a planetary rover. In: EXPERIMENTAL ROBOTICS VIII - Volume 5. pp. 644–653.